

1 - النهايات

• نهايات مجموع أو جداء أو حاصل قسمة دالتين

f و g دالتان عدديتان، α عدد حقيقي أو $-\infty$ أو $+\infty$. l و l' عددان حقيقيان
الجدول التالية تقدم المبرهنات المتعلقة بنهايات الدوال المقررة في السنة الثالثة من التعليم الثانوي.

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ هي	و $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$ هي	فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x))$ هي
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) $ هي	و $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) $ هي	فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times g(x) $ هي
l	l'	ll'
$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) $ هي	و $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) $ هي	فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left \frac{g(x)}{f(x)} \right $ هي
l	$l' \neq 0$ حيث $l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
$l \neq 0$	0	$+\infty$
0	0	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.
l	$+\infty$	0
$+\infty$	l'	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.

• ملاحظة : الحالات التي لا تسمح فيها المبرهنات بالنص على نتيجة تسمى حالات عدم التعيين؛ عددها

أربعة وهي من الأشكال التالية : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$

• النهايات والحصر

1. f, g, h هي دوال معرفة في جوار $+\infty$ حيث $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$: l عدد حقيقي.
إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

2. f و g دالتان عدديتان معرفتان في جوار $+\infty$ حيث $f(x) \geq g(x)$.
إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. f و g دالتان عدديتان معرفتان في جوار $+\infty$ حيث $f(x) \leq g(x)$.
إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

• نهاية دالة كثير الحدود

f دالة كثيرة الحدود معرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ حيث $a_n \neq 0$ و n عدد طبيعي غير منعدم.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n)$

• نهاية دالة ناطقة

f دالة ناطقة حيث : $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0}$: $a_n \neq 0$ و $b_p \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}^*$ و $p \in \mathbb{N}^*$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n x^n}{b_p x^p} \right)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a_n x^n}{b_p x^p} \right)$

• نهاية دالة مركبة

f, g, h دوال عددية حيث $h = g \circ f$: a, b, l أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.
إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ و $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = l$.

• السلوك التقاربي

f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]a; +\infty[$ أو $]a; -\infty[$

حيث a عدد حقيقي معلوم و b عدد حقيقي. (\mathcal{E}) المنحنى المثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم.

إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (أو $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$) فإن المستقيم ذا المعادلة $x = a$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (\mathcal{E}) ، يوازي محور الترتيب.

إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$) فإن المستقيم ذا المعادلة $y = b$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (\mathcal{E}) ، يوازي محور الفواصل.

إذا كان $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ حيث p, m عددان حقيقيان و $m \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ (أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$) فإن المستقيم ذا المعادلة $y = mx + p$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{E}) .

إذا كان $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ و $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = p$ حيث p, m عددان حقيقيان و $m \neq 0$

فإن المستقيم ذا المعادلة $y = mx + p$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{C}) .

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = +\infty$ حيث $m \neq 0$ فإن (\mathcal{C}) يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحنى المستقيم ذو المعادلة $y = mx$.

• إذا كان $m = 0$ فإن (\mathcal{C}) يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحنى محور الفواصل.

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (أو $-\infty$) فإن (\mathcal{C}) يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحنى محور الترتيب.

II - الاستمرارية

f دالة معرفة على مجموعة D ، a عدد حقيقي غير منعدم من D . I مجال محتوى في D .

• f مستمرة عند a يعني $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

• f مستمرة على I يعني f مستمرة عند كل عدد حقيقي a من I .

• العمليات الجبرية

f و g دالتان معرفتان على مجال I ، a عدد حقيقي ينتمي إلى I .

• إذا كانت f و g مستمرتين عند a فإن الدالتين $f + g$ و $f \times g$ مستمرتان عند a .

• إذا كانت g مستمرة عند a و $g(a) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{1}{g}$ مستمرة عند a .

• إذا كانت f و g مستمرتين عند a و $g(a) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{f}{g}$ مستمرة عند a .

• إذا كانت f مستمرة عند a و g مستمرة عند $f(a)$ فإن الدالة $g \circ f$ مستمرة عند a .

• الدوال كثيرة الحدود، \sin ، \cos ، $x \mapsto |x|$ مستمرة على \mathbb{R} .

• الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

• الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على المجال $[0 ; +\infty[$.

• مبرهنة القيم المتوسطة

f دالة معرفة على المجال $[a ; b]$.

• إذا كانت f مستمرة على المجال $[a ; b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي m

محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c في المجال $[a ; b]$ حيث $f(c) = m$.

• التفسير الهندسي

• المستقيم ذو المعادلة $y = m$ يقطع المنحنى الممثل للدالة f في نقطة على الأقل، فاصلتها c

تنتمي إلى المجال $[a ; b]$.

ملاحظة : • إذا كانت f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a ; b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي m

محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد عدد حقيقي c وحيد ينتمي إلى المجال $[a ; b]$ حيث $f(c) = m$.

• إذا كانت f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a ; b]$ حيث $f(a) \cdot f(b) < 0$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال $[a ; b]$.

1 حساب نهاية مجموع أو جداء أو حاصل قسمة دالتين

تقرين

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)} ; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x} \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2} \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x)$$

حل

• حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2} \right)$

الدالة $x \mapsto 1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}$ معرفة على المجموعة $]0; +\infty[\cup]-\infty; 0[$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x} \right) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x^2} = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2} \right) = 1$

• حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x} \right)$

الدالة $x \mapsto \sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}$ معرفة على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (لأن $\sin x \approx x$ بجوار العدد 0)

إذن $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x} \right) = 1$

• حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$

الدالة $x \mapsto \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$ معرفة على المجموعة $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow 1} (3x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)(x+2) = 0$

من أجل كل عدد x قريب من 1 حيث $x < 1$: $(x-1)(x+2) < 0$

و من أجل كل عدد x قريب من 1 حيث $x > 1$: $(x-1)(x+2) > 0$

حسب المبرهنات المقدمة في الجداول السابقة :

ينتج أن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)} = -\infty$

• حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x)$

الدالة $x \mapsto x^3 + x$ معرفة على \mathbb{R}

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x) = -\infty$

• حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x)$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x) = +\infty$

تمرين

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + x + 1)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \sqrt{x}}{x - 1}$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x})$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

حل

• حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + x + 1)$ الدالة $x \mapsto x^3 - x^2 + x + 1$ معرفة على \mathbb{R} .

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x + 1) = +\infty$

المبرهنة المتعلقة بنهاية مجموع دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم، $x^3 - x^2 + x + 1 = x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$

ينتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + x + 1) = +\infty$

• حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x + \sqrt{x}}{x - 1}\right)$ الدالة $x \mapsto \frac{4x + \sqrt{x}}{x - 1}$ معرفة على $\mathbb{R}^* - \{1\}$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x + \sqrt{x}) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$

المبرهنة المتعلقة بنهاية حاصل قسمة دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x يختلف عن 1

$$\frac{4x + \sqrt{x}}{x - 1} = \frac{x \left(4 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{4 + \frac{\sqrt{x}}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{4 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{x}}$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 4$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \sqrt{x}}{x - 1} = 4$

• حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ الدالة $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$ معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$

المبرهنة المتعلقة بنهاية حاصل قسمة دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

نعلم أن $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم : $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$

بوضع $y = \frac{x}{2}$ يكون $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$ و $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin y}{y} \right)^2$

نعلم أن $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right) = 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = 1$

ينتج أن $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$ و بالتالي $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1$

• حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x})$ الدالة $x \mapsto \frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x})$ معرفة على $]0; +\infty[$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3\sqrt{x}) = +\infty$

المبرهنة المتعلقة بنهاية جداء دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $\frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x}) = \frac{x^2}{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x} = x + \frac{3}{\sqrt{x}}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$ ينتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x}) = +\infty$

3 استعمال الحصر لحساب نهاية دالة

تمرين

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sin x)$$

حل

• حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sin x)$ الدالة $x \mapsto (2x - \sin x)$ معرفة على \mathbb{R} .

نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي x : $-1 \leq \sin x \leq 1$

إذا كان $x \geq 0$ فإن $-1 \leq \sin x \leq 1$ و $-1 \leq -\sin x \leq 1$

ينتج أن $2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$

و $2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sin x) = +\infty$

• حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$ الدالة $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$.

من أجل أن كل عدد حقيقي x : $-1 \leq \sin x \leq 1$

إذا كان $x > 0$ فإن $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

• حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}}$ الدالة $x \mapsto \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}}$ معرفة على المجال $]0; +\infty[$.

من أجل أن كل عدد موجب تماما x : $-1 \leq \cos x \leq 1$ و بالتالي $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$

بما أن $\sqrt{x} > 0$ على المجال $]0; +\infty[$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} = 0$

تمرين

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x + 3}$$

حل

- حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x + 3}$ الدالة $x \mapsto \sqrt{2x + 3}$ معرفة على المجال $[-\frac{3}{2}; +\infty[$ لتكن f الدالة $x \mapsto 2x + 3$ المعرفة على $[-\frac{3}{2}; +\infty[$ و g الدالة $y \mapsto \sqrt{y}$ المعرفة على $[0; +\infty[$ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-\frac{3}{2}; +\infty[$: $(g \circ f)(x) = \sqrt{2x + 3}$ بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 3) = +\infty$ و $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x + 3} = +\infty$
- حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x}$

- الدالة $x \mapsto \sqrt{x^2 - x}$ معرفة على المجموعة $]0; +\infty[\cup]-\infty; -1]$ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} = +\infty$
- حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ الدالة $x \mapsto \frac{\sin 3x}{x}$ معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$

- من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم : $\frac{\sin 3x}{x} = 3 \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)$ بوضع $y = 3x$ نلاحظ أن y يؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى 0 . ونعلم أن $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$ وبالتالي $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$ أي $\lim_{x \rightarrow 0} 3 \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right) = 3$

5 البحث عن المستقيمات المقاربة للمنحنى الممثل لدالة

تمرين 1

- f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x + 2}$ و (\mathcal{C}) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم.
- 1. ادرس نهاية الدالة f عن اليمين و عن اليسار عند -2 . ماذا تستنتج؟
- 2. عين ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c و c حيث من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{-2\}$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$
- 3. استنتج أن المنحنى (\mathcal{C}) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.

1. الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ لدينا $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0$ ، $13 > 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 + 1) = 13$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	-	\emptyset	+

إشارة $x+2$ ملخصة في الجدول المقابل .

ينتج أن $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +2} f(x) = +\infty$

و بالتالي فالمستقيم ذو المعادلة $x = -2$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (\mathcal{C}) ، (يوازي محور الترتيب).

2. باستعمال القسمة الإقليدية لكثير الحدود $3x^2 + 1$ على كثير الحدود $x+2$ نجد حاصل القسمة هو $3x-6$ وباقي القسمة هو 13 .

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-2\}$: $\frac{3x^2 + 1}{x+2} = 3x - 6 + \frac{13}{x+2}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-2\}$: $f(x) = 3x - 6 + \frac{13}{x+2}$

ينتج أن الأعداد a, b و c المحققة للشرط هي $a = 3$ ، $b = -6$ و $c = 13$

(يمكن الحصول على الأعداد a, b و c باستعمال شرط تساوي كثيري حدود).

3. استنتاج أن المنحنى (\mathcal{C}) يقبل مستقيما مقاربا مائلا.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$

نلاحظ أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{13}{x+2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{13}{x+2} = 0$

ينتج أن المستقيم ذا المعادلة $y = 3x - 6$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{C}) .

تمرين 2

نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ و (\mathcal{E}_g) المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم. أثبت أن المنحنى (\mathcal{E}_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$.

حل

مجموعة تعريف الدالة f هي \mathbb{R} لأن من أجل كل عدد حقيقي x ، $x^2 + x + 1 > 0$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$ و بالتالي $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

• حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم : $\frac{g(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$

• حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x]$ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) - x = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1}) = 2$ إذن $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - x] = \frac{1}{2}$ نستنتج أن المستقيم ذا المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى (\mathcal{C}_g) بجوار $+\infty$.

تمرين 3

h هي الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $h(x) = \frac{x^2 - 5}{3x^2 + 1}$ و (\mathcal{C}_h) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم. أثبت أن المنحنى (\mathcal{C}_h) يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل.

حل

• الدالة h معرفة على \mathbb{R} .

• حساب نهايتي h عند $-\infty$ و $+\infty$. لدينا $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5}{3x^2 + 1} = \frac{1}{3}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5}{3x^2 + 1} = \frac{1}{3}$

إذن $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \frac{1}{3}$

و بالتالي المنحنى (\mathcal{C}_h) يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل معادلته $y = \frac{1}{3}$.

6 إثبات استمرارية دالة عند عدد حقيقي

تمرين

أدرس استمرارية كل دالة من الدوال f ، g و h التالية عند العدد x_0 .

1. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ إذا كان $x \neq 1$ و $f(1) = 2$ $x_0 = 1$

2. $g(x) = \frac{2x}{\sin x}$ إذا كان $x \neq 0$ و $g(0) = 0$ $x_0 = 0$

3. $h(x) = \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$ إذا كان $x \neq 3$ و $h(3) = 4$ $x_0 = 3$

حل

1. الدالة f معرفة على \mathbb{R} .

• حساب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. لدينا $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}-1) = 0$.

إذن لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة (أي توجد حالة عدم التعيين).

لدينا من أجل كل عدد x يختلف عن 1 :

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1$$

إذن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2$. نعلم أن $f(1) = 2$ و بالتالي الدالة f مستمرة عند العدد 1.

2. الدالة g معرفة على \mathbb{R} .

• حساب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$. لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم، $\frac{2x}{\sin x} = \frac{2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$

تمارين و حلول نموذجية

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} = 2$ أي $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$ لدينا $g(0) = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$ وبالتالي الدالة g ليست مستمرة عند العدد 0.

3. الدالة h معرفة على \mathbb{R} .

• حساب $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$ لدينا $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{1+x} - 2 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$

لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 3 :

$$h(x) = \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x}-2)(\sqrt{1+x}+2)}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)} = \frac{(1+x)-4}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+2}$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{1+x}+2) = 4$ إذن $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3} = 4$

وبالتالي $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 4$. نعلم أن $h(3) = 4$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = h(3)$ فإن الدالة h مستمرة عند العدد 3.

7 استعمال مبرهنة القيم المتوسطة

تمرين

بين أن المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال المفتوح $] -1 ; 0]$.

حل

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = x^3 + x + 1$

f معرفة على \mathbb{R} إذن f معرفة على المجال المغلق $[-1 ; 0]$.

الدالة f مستمرة على \mathbb{R} (لأن f هي مجموع دوال مرجعية معرفة و مستمرة على \mathbb{R}).

إذن f مستمرة على \mathbb{R} . وبالتالي f مستمرة على المجال $[-1 ; 0]$.

لدينا $f(-1) = -1$ و $f(0) = 1$ إذن $f(-1)$ و $f(0)$ مختلفان في الإشارة.

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 3x^2 + 1$.

نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$. وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على \mathbb{R} .

ينتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1 ; 0]$.

لدينا f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-1 ; 0]$ و $f(-1)$ و $f(0)$ من إشارتين مختلفتين

إذن المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال المفتوح $] -1 ; 0]$.

تمرين 1

f هي الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$.
ليكن D مجموعة تعريف f و (\mathcal{E}_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم $(0; \vec{i}, \vec{j})$.
1. عين مجموعة التعريف D للدالة f و بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من D ،

$$f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$$

2. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. بين أن المنحنى (\mathcal{E}_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$.

4. أثبت أن المنحنى (\mathcal{E}_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $-\infty$. عين معادلة لهذا المستقيم .

حل

1. تعيين مجموعة التعريف D للدالة f . الدالة f : معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2 - 3x + 1 \geq 0$.
دراسة إشارة ثلاثي الحدود $x^2 - 3x + 1$.

$\Delta = 5$ ، $\Delta > 0$ إذن ثلاثي الحدود $x^2 - 3x + 1$ يقبل جذرين مختلفين في \mathbb{R} هما : $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

• باستعمال المبرهنات حول إشارة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية ،

ينتج أن $x^2 - 3x + 1 \geq 0$ على $D =]-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$.

• كتابة $f(x)$ على الشكل $\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$. ثلاثي الحدود $x^2 - 3x + 1$ يكتب على الشكل النموذجي

كما يلي : $x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من D : $f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$.

2. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} = +\infty$ و بالتالي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

لدينا أيضا $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$

ينتج أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} = +\infty$ و بالتالي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

3. إثبات أن المنحنى (\mathcal{E}) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

لدينا من أجل كل x من D : $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{x} = \frac{x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}$.

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$

تمارين و حلول نموذجية

• حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$

من أجل كل عدد حقيقي x موجب من D ،

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 - 3x + 1} - x = \frac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x}$$

$$= \frac{x(-3 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = \frac{-3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3 + \frac{1}{x}) = -3$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -\frac{3}{2}$

ينتج أن المستقيم ذا المعادلة $y = x - \frac{3}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى (\mathcal{C}) بجوار $+\infty$.

4. البحث عن مستقيم مقارب للمنحنى (\mathcal{C}_f) بجوار $-\infty$. لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

• حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x سالب من D :

$$\frac{f(x)}{x} = \left(-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)$$
 بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = -1$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

• حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ من أجل كل عدد x سالب من D :

$$f(x) + x = \sqrt{x^2 - 3x + 1} + x$$

$$= \frac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x} = \frac{x(-3 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1)} = \frac{-3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1}$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3 + \frac{1}{x}) = -3$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1) = -2$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \frac{3}{2}$

و بالتالي المنحنى (\mathcal{C}) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = -x + \frac{3}{2}$

تمرين 2

- نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي :
 • إذا كان $x \geq 2$: $f(x) = \sqrt{x - 2}$
 • إذا كان $x < 2$: $f(x) = x^2 + kx + 1$
 • عين العدد الحقيقي k حتى تكون الدالة f مستمرة عند العدد 2.

حل

الدالة f معرفة على \mathbb{R} . إذن الدالة f معرفة عند العدد 2 و $f(2) = 0$.

• حساب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + kx + 1) = 5 + 2k \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x - 2} = 0$$

لدينا $f(2) = 5 + 2k$ يعني $5 + 2k = 0$ أي $k = -\frac{5}{2}$

و بالتالي إذا كان $k = -\frac{5}{2}$ فإن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ (أي $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$)

ينتج أن إذا كان $k = -\frac{5}{2}$ فإن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

و بالتالي الدالة f مستمرة عند العدد 2 إذا وفقط إذا كان $k = -\frac{5}{2}$.

تمارين و مسائل

المستقيمات المقاربة

العمليات على النهايات

في التمارين من (17) إلى (25).

(E) هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم معطى.

ادرس وجود المستقيمات المقاربة للمنحنى (E).

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x-1} \quad (18)$$

$$f(x) = x + 1 - \frac{3}{x^2 + 1} \quad (19)$$

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x-5} \quad (20)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x+1} \quad (21)$$

$$f(x) = x - \sqrt{x} \quad (22)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (23)$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \quad (24)$$

(25) نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \cos x - x$$

1. ادرس نهاية كل من $f(x) - x$ و $\frac{f(x)}{x}$ عندما x يؤول إلى $+\infty$.

2. بين أن المنحنى (E) الممثل للدالة f لا يقبل مستقيما مقاربا في جوار $+\infty$.

(الحساب $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ يمكن إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي x : $-1 - x \leq f(x) \leq 1 - x$)

الاستمرارية

في التمارين من (26) إلى (28).

f دالة عددية و x_0 عدد حقيقي، يطلب دراسة استمرارية الدالة f عند x_0 .

$$x_0 = 1 : f(x) = x^2 - 2x \quad (26)$$

$$x_0 = 0 : f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (27)$$

$$x_0 \neq 0 : f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (28)$$

و $f(0) = 1$

في التمارين من (1) إلى (7)، يطلب حساب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى العدد a .

$$a = 1 + \infty : f(x) = x^2 + x + 1 \quad (1)$$

$$a = 0 : f(x) = x^3 + 3x \quad (2)$$

$$a = +\infty : f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4 \quad (3)$$

$$a = +\infty : f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} \quad (4)$$

$$a = +\infty : f(x) = x^3 \left(\cos \frac{1}{x} - 2 \right) \quad (5)$$

$$a = 1 \text{ أو } a = +\infty : f(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad (6)$$

$$a = -\infty$$

$$f(x) = \frac{E(x)}{x} \quad (7)$$

للكد x . $a = +\infty$

في التمارين التالية من (8) إلى (16)، يطلب

تعيين نهايات الدالة f عندما يؤول x إلى a .

$$a = -5 \text{ أو } a = 2 : f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} \quad (8)$$

$$a = -\infty \text{ أو } a = +\infty$$

$$a = -\frac{3}{2} \text{ أو } a = \frac{3}{2} : f(x) = \frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} \quad (9)$$

$$a = -\infty \text{ أو } a = +\infty$$

$$a = +\infty : f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x \quad (10)$$

$$a = +\infty : f(x) = \frac{3x - 5}{x + 1} - \frac{\sin x}{x} \quad (11)$$

$$a = 1 : f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \quad (12)$$

$$a = 0 : f(x) = \frac{1}{x^4} \quad (13)$$

$$a = 0 : f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (14)$$

$$a = \frac{\pi}{3} : f(x) = \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}} \quad (15)$$

$$a = 0 : f(x) = \frac{\tan 3x}{\sin 5x} \quad (16)$$

تمارين و مسائل

- عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (\mathcal{C}_f)
 - حدد الوضع النسبي للمنحنى (\mathcal{C}_f) و المستقيم المقارب المائل له.

37 f دالة عددية معرفة كما يلي :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + mx \quad m \in \mathbb{R}$$

عين نهايات الدالة f عندما x يؤول إلى $-\infty$ أو $+\infty$
 (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m).

38 h هي الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$h(x) = \sin(x^2 + x + 1)$$

أثبت أن الدالة h مستمرة عند كل عدد حقيقي x_0

39 ادرس $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

40 f هي دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x+1)^2}$$

(1) بين أنه يوجد عدداً حقيقياً a و b حيث
 من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 :

$$f(x) = ax + b + \varphi(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$$

(2) عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

(3) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (\mathcal{C}_f)

المثل للدالة f في معلم (\vec{i}, \vec{j}) .

41 طول حرف مكعب هو x cm و أبعاد متوازي

المستطيلات هي 1 cm ، 3 cm و $(3x+4)$ cm

أوجد حصراً لقيمة x التي من أجلها يكون حجم

المكعب يساوي حجم متوازي المستطيلات.

بين أن $3,5 < x < 3,6$.

$$29 \quad f(x) = \frac{2x^2 + |x|}{x} \quad x_0 = 0$$

خواص الدوال المستمرة على مجال

30 (1) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = 2x^3 + 5x - 4$$

(2) استنتج أن المعادلة $2x^3 + 5x - 4 = 0$ تقبل
 حلاً واحداً في المجال المفتوح $]0; 1[$.

31 نفس السؤال بالنسبة للمعادلة

$$x^6 + x^2 - 1 = 0$$

32 (1) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً واحداً
 في المجال $]1; -1[$.

33 f هي الدالة المعرفة كما يلي $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

بين أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلاً واحداً α
 في المجال $]2; 3[$.

34 بين أن المعادلة $\cos x = x$ تقبل حلاً

واحداً في \mathbb{R} .

35 بين أن المعادلة $x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ تقبل

حلاً واحداً في المجال المفتوح $]1; 3[$.

مسائل

36 f هي دالة عددية معرفة كما يلي

$$f(x) = \frac{5x^2 + x + 1}{x + 2}$$

(1) عين مجموعة تعريف D للدالة f و بين أنه

توجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل

كل عدد حقيقي x من D ،

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

(2) ليكن (\mathcal{C}_f) المنحنى المثل للدالة f

في المستوى المنسوب إلى المعلم (\vec{i}, \vec{j}) .